正多面体と半正多面体の GeoGebra を用いた具現

―折り紙および動画による教育実践を目指して―

亀澤千賀
久留米工業大学工学部教育創造工学科
c136116kc@kurume-it.ac.jp

佐々木良勝　教授
久留米工業大学工学部教育創造工学科
sasakiyo@kurume-it.ac.jp

キーワード:　正多面体，半正多面体，変形

1 序論

多面体には，多くの種類が存在する。これまで卒業研究として，正多面体と半正多面体について研究してきた。正多面体は 5 種類，半正多面体は 13 種類存在している。

正多面体と半正多面体は，ある操作を行うことで連続的に変形することが可能である。今回，卒業研究にあたり，折り紙を用いた多面体の作成や多面体を連続的に変形することを幾何，代数，解析を一つに結び付けた動的な数学ソフトウェアである GeoGebra を用いて動画で表現した。これらを教育の現場で取り入れることができないか研究を行った。

2 正多面体と半正多面体

正多面体は「プラトンの立体」とも呼ばれている。正多面体とは，以下の条件を満たす非常に対称性の高い多面体である。

＜定義＞[1]
①有限個の面で囲まれた凸多面体である。
②各面はすべて合同な正多角形である。
③各頂点はすべて合同な正多角錐である。
＜定理＞[1]
正多面体は 5 種類しか存在しない。

一方で，半正多面体は「アルキメデスの立体」とも呼ばれている。半正多面体とは，以下の条件で構成される。

＜定義＞[1]
①有限個の多角形で囲まれた凸多面体である。
②各面はすべての辺長が等しい正多角形からなる。
　ただし，その辺数が全体として同一ではないとする。
③各頂点での多角錐は，すべて合同である。
＜定理＞[1]
半正多面体は 13 種類しか存在しない。

正多面体が 5 種類，半正多面体が 13 種類しかないことは中学校程度の数学で証明することができる。

正多面体は英語で Regular polyhedron である。半正多面体は Semiregular polyhedron であり，これはさらに次の 4 つのグループに分類できる：切頂正多面体が Truncated regular polyhedron，変形多面体が Snub polyhedron，準正多面体が Quasi-regular polyhedron，斜方多面体が Rhombic polyhedron である。なお，以下，Rn，Tn，Sn，Q$n\cdot m$，G$n\cdot m$，s$n\cdot m$と英語表記の頭文字をとって表すこととする。正多面体の一覧を以下に挙げる：

＜正多面体＞
●$\boxed{\text{R4}}$正 4 面体：Regular tetrahedron
●$\boxed{\text{R6}}$正 6 面体：Regular hexahedron(=立方体：Cube)
●$\boxed{\text{R8}}$正 8 面体：Regular octahedron
●$\boxed{\text{R12}}$正 12 面体：Regular dodecahedron
●$\boxed{\text{R20}}$正 20 面体：Regular icosahedron

＜半正多面体＞
ⅰ）切頂正多面体
●$\boxed{\text{T4}}$切頂正 4 面体：Truncated tetrahedron
●$\boxed{\text{T6}}$切頂正 6 面体：Truncated hexahedron(=切頂立方体：Truncated cube)
●$\boxed{\text{T8}}$切頂正 8 面体：Truncated octahedron
●$\boxed{\text{T12}}$切頂正 12 面体：Truncated dodecahedron
●$\boxed{\text{T20}}$切頂正 20 面体：Truncated icosahedron
ⅱ）変形多面体
●$\boxed{\text{S6}}$変形 6 面体：Snub hexahedron(=変形立方体：Snub cube)
●$\boxed{\text{S12}}$変形 12 面体：Snub dodecahedron
ⅲ）準正多面体
●$\boxed{\text{Q6・8}}$立方 8 面体：Cuboctahedron
●$\boxed{\text{Q20・12}}$20・12 面体：Icosidodecahedron
ⅳ）斜方多面体
●$\boxed{\text{s6・8}}$斜方立方 8 面体：Rhombicuboctahedron(=小菱形立方 8 面体：Small rhombicuoctahedron)
●$\boxed{\text{G6・8}}$斜方切頂立方 8 面体：Rhombitruncated cuboctahedron(=大菱形立方 8 面体：Great rhombicuboctahedron)
●$\boxed{\text{s20・12}}$斜方 20・12 面体：Rhombicosidodecahedron(=小菱形 20・12 面体：Small rhombicosidodecahedron)
●$\boxed{\text{G20・12}}$斜方切頂 20・12 面体：Rhombitruncated icosidodecahedron(=大菱形 20・12 面体：Great rhombicosidodecahedron)

3 オイラーの多面体定理

＜定理＞[2]
凸多面体の頂点，辺，面の総数をそれぞれ V,E,F と表すと，関係式 $V+F=E+2$ が成立する。

オイラーの多面体定理は以下の流れで証明することが

できる。

証明
Step1：多面体を平面グラフに展開
Step2：平面グラフを三角形に分割
Step3：三角形を除いていく
Step4：最後に三角形で確認

オイラーの多面体定理を表にすると，以下のようにまとめられる。（表）

立体名	頂点（vertex）	面（face）	辺（edge）	*V+F-E*
R4	4	4	6	2
R6	8	6	12	2
R8	6	8	12	2
R12	20	12	30	2
R20	12	20	30	2

表．正多面体でのオイラーの多面体定理

4　折り紙

折り紙で正多面体や半正多面体を作り，中学校の教育現場で活用できないか。そこで，授業でどのように取り入れるか，授業の展開や方法を考えた。多面体は折り紙で作ることができる。そこで，多面体の折り方が載っている本[3]をもとに多面体を作ってみた。（写真１）

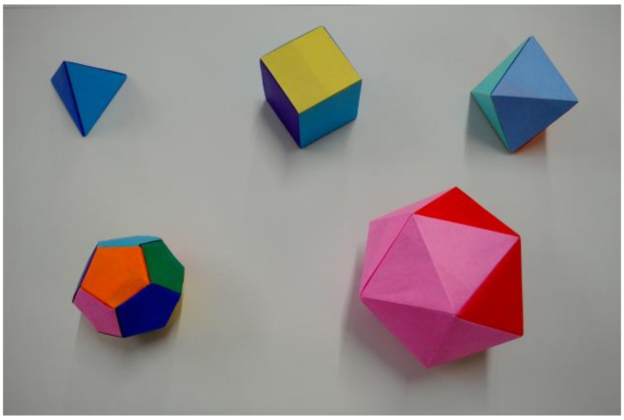

写真１．折り紙で作成した正多面体

5　考える変形

正多面体と半正多面体は，次に挙げる連続性条件を満たしながら連続的変形によって相互にうつりあう。

＜変形の連続性条件＞
頂点および辺は，複数の頂点が１つに合流するときのみ消滅し，１つの頂点が複数に分岐するときのみ生成する。

化学の分野において，この条件の意味するところは，頂点を原子，辺を結合，多面体を分子と見たときに原子が突然消滅してしまうことはないということである。

この視点から，半正多面体は連続性条件を満たしつつ正多面体が他の正多面体に連続的に変形する際の中間生成物と見ることができる。

変形の仕方について例として（写真２）のような変形が考えられる。

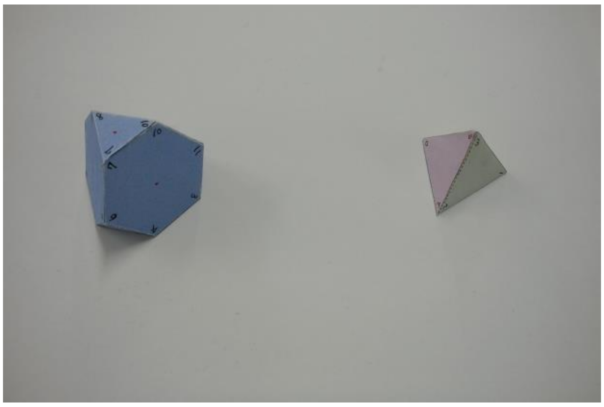

写真２．T4→R4 の変形

6　GeoGebra を用いた多面体の変形

数学ソフトウェアである GeoGebra を用いて多面体を作成する。多面体の変形を動画にする前にそれぞれの多面体を作成する必要がある。空間座標上に座標を打ち込み，それぞれの多面体を作成する。作成した多面体をもとに変形中の動画を作成する。

7　結果と考察

・GeoGebra で作成した動画を教育として授業や学習の場で扱うことはできないか考えた。しかし，残念ながら実践することができなかった。

・GeoGebra を用いた多面体の変形を３種類以上の多面体で連続的変形することができるのではないか。

・今後は折り紙や GeoGebra を用いた動画を授業実践において活用することを試みたい。

参考文献

[1] 一松信『正多面体を解く』（東海大学出版部，2002）
[2]「オイラーの多面体定理の証明　高校数学の美しい物語」（http://mathtrain.jp/euler_poly）
[3]川村みゆき『考える頭をつくろう！はじめての多面体おりがみ』（株式会社日本ヴォーグ社，2001）